

공학수학 에센스

연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 마인속과 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 09 행렬의 활용

[9.1 크래머 법칙]

1. $x_1 = \frac{61}{53}, x_2 = -\frac{51}{53}, x_3 = \frac{13}{53}$
2. $x_1 = 7, x_2 = 25, x_3 = -15$
3.
 - (1) $k \neq \frac{6}{5}$ 인 경우 $x_1 = \frac{3k-2}{-5k+6}, x_2 = \frac{3k-6}{-5k+6}$ (유일해)
 - (2) $k = \frac{6}{5}$ 인 경우 해를 갖지 않는다.

[9.2 고윳값과 고유벡터]

4. 고윳값 : $\lambda = 1 \pm \sqrt{6}$
 - $\lambda_1 = 1 + \sqrt{6}$ 일 때, $\therefore K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$
 - $\lambda_2 = 1 - \sqrt{6}$ 일 때, $\therefore K_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$
5. 고윳값 : $\lambda = 4, -4$
 - $\lambda_1 = 4$ 일 때, $\therefore K_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - $\lambda_2 = -4$ 일 때, $\therefore K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
6. 고윳값 : $\lambda = 0$ (중근)
 - $\lambda = 0$ 일 때, $\therefore K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
7. 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$
 - $\lambda_1 = 1$ 일 때, $\therefore K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - $\lambda_2 = -1$ 일 때, $\therefore K_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - $\lambda_3 = 2$ 일 때, $\therefore K_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
8. 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$
 - $\lambda_1 = 1$ 일 때, $\therefore K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

CHAPTER 09 행렬의 활용

$$\cdot \lambda_2 = 2 \text{ 일 때, } \therefore K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \lambda_3 = 3 \text{ 일 때, } \therefore K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

$$\cdot \lambda_1 = 1 \text{ 일 때, } \therefore K_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \lambda_2 = 2 \text{ 일 때, } \therefore K_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \lambda_3 = 3 \text{ 일 때, } \therefore K_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10. 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}$

$$\text{대응하는 고유벡터 : } K_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

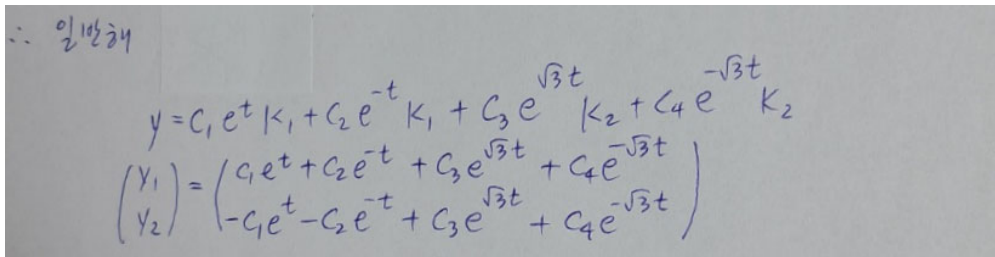
[9.3 고윳값 문제의 활용]

$$11. y = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$12. y = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$13. y = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t}$$

14.



Handwritten solution for problem 14:

$$y = c_1 e^t K_1 + c_2 e^{-t} K_1 + c_3 e^{\sqrt{3}t} K_2 + c_4 e^{-\sqrt{3}t} K_2$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{\sqrt{3}t} + c_4 e^{-\sqrt{3}t} \\ -c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3 e^{\sqrt{3}t} + c_4 e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$$

CHAPTER 09 행렬의 활용

15.

Handwritten solution for problem 15:

$$\therefore \text{일반해 } y = c_1' e^{\sqrt{2}it} K_1 + c_2' e^{-\sqrt{2}it} K_1 + c_3' e^{it} K_2 + c_4' e^{-it} K_2$$
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t) K_1 + (c_3 \cos t + c_4 \sin t) K_2$$
$$= \begin{pmatrix} c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t \\ -c_1 \cos \sqrt{2}t - c_2 \sin \sqrt{2}t + c_3 \cos t + c_4 \sin t \end{pmatrix}$$

16.

오랜 시간이 지나면

방송국 1은 $\frac{19}{21}\% \approx 90.5\%$ 점유

방송국 2는 $\frac{2}{21}\% \approx 9.5\%$ 점유

17. $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 46 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$

19.

1~2세 : $1000 \times \frac{160}{229} \approx 699$

3~4세 : $1000 \times \frac{60}{229} \approx 262$

5~6세 : $1000 \times \frac{9}{229} \approx 39$

20.

1~2세 : $1000 \times \frac{10}{19} \approx 526$

3~4세 : $1000 \times \frac{6}{19} \approx 316$

5~6세 : $1000 \times \frac{3}{19} \approx 158$

[9.4 직교행렬]

21. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

CHAPTER 09 행렬의 활용

$$22. P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$23. P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$24. P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[9.5 대각화]

$$25. \text{대각화 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 3^5 \\ 0 & 3^5 \end{pmatrix}$$

$$26. \text{대각화 } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B^7 = \begin{pmatrix} 5^6 & 2 \times 5^6 \\ 2 \times 5^6 & 4 \times 5^6 \end{pmatrix}$$

$$27. \text{대각화 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C^9 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 2^{11} + \frac{5}{2} \times 3^9 & -2 + 2^{10} & -\frac{1}{2} - 2^{10} + \frac{5}{2} \times 3^9 \\ \frac{5}{2} - 3 \times 2^{10} + \frac{7}{2} \times 3^9 & -2 + 3 \times 2^9 & -\frac{1}{2} - 3 \times 2^9 + \frac{7}{2} \times 3^9 \\ -\frac{5}{2} + 2^{11} - \frac{1}{2} \times 3^{10} & 2 - 2^{10} & \frac{1}{2} + 2^{10} - \frac{1}{2} \times 3^{10} \end{pmatrix}$$

$$28. \text{대각화 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 + 3 \cdot 2^{11} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{11} \end{pmatrix}$$

29. 행렬 F는 대각화가 가능하지 않다.

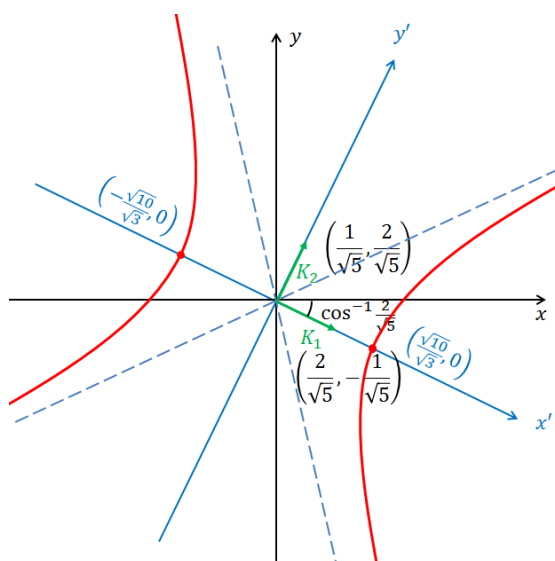
그러므로 F^{13} 은 대각화를 이용한 방법으로 계산할 수 없다.

$$30. \text{대각화 } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G^{15} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}5^{15} - \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}5^{15} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}5^{15} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}5^{15} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}5^{15} - \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}5^{15} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}5^{15} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}5^{15} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}5^{15} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

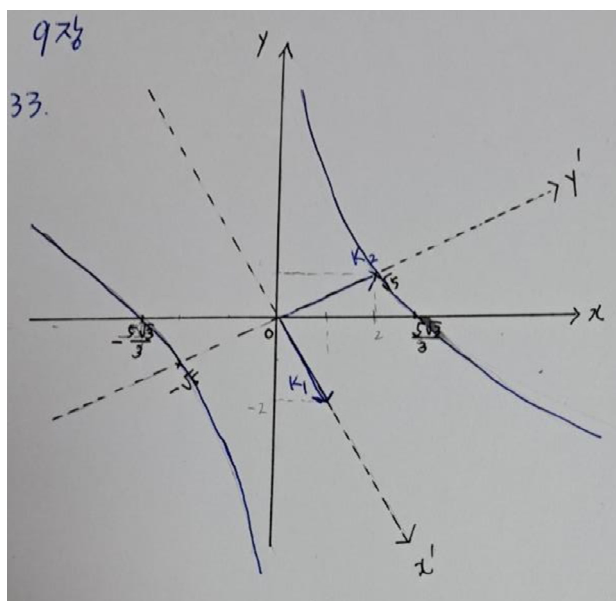
CHAPTER 09 행렬의 활용

31. 대각화 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $H^{17} = \begin{pmatrix} 4 \times 3^{15} + 16 \times 6^{15} + 9^{16} & 4 \times 3^{15} - 8 \times 6^{15} - 2 \times 9^{16} & 2 \times 3^{15} - 16 \times 6^{15} + 2 \times 9^{16} \\ 4 \times 3^{15} - 8 \times 6^{15} - 2 \times 9^{16} & 4 \times 3^{15} + 4 \times 6^{15} + 4 \times 9^{16} & 2 \times 3^{15} + 8 \times 6^{15} - 4 \times 9^{16} \\ 2 \times 3^{15} - 16 \times 6^{15} + 2 \times 9^{16} & 2 \times 3^{15} + 8 \times 6^{15} - 4 \times 9^{16} & 3^{15} + 16 \times 6^{15} + 4 \times 9^{16} \end{pmatrix}$

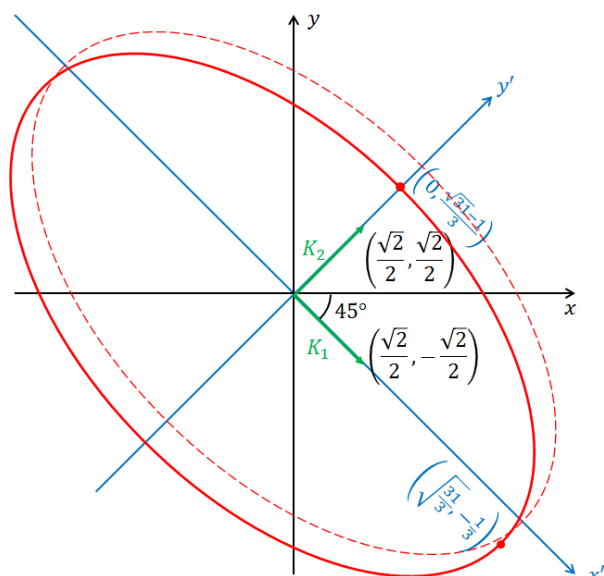
32.



33.



34.



35.

CHAPTER 09 행렬의 활용

